Equivalences du pivot par ligne - surjectivité

Soit $A \in M_{m \times n}$ et l'application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- A admet **un pivot par ligne** (donc m pivots) ;
- A est de rang m ;
- $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible ;
- $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Span}(\text{colonnes de A}) = \mathbb{R}^m$
- T est surjective.

Equivalences du pivot par colonne - injectivité

Soit $A \in M_{m \times n}$ et l'application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- A admet **un pivot par colonne** (donc n pivots) ;
- A est de rang n ;
- le système $A\vec{x} = 0_{\mathbb{R}^m}$ admet la solution unique $\vec{x} = 0_{\mathbb{R}^n}$;
- les colonnes de A sont linéairement indépendantes ;
- $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$
- T est injective.

Equivalences à l'inversibilité - bijectivité

Soit $A \in M_{n\times n}$ et l'application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- T est bijective ;
- T est surjective ;
- T est injective ;
- A est inversible ;
- A admet n **pivots** ;
- $\det(A) \neq 0$;
- $A\vec{x} = 0_{\mathbb{R}^n} \implies \vec{x} = 0_{\mathbb{R}^n}$;
- A est de rang n.
- $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$;
- $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
- pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution $(\vec{x} = A^{-1}\vec{b})$;
- les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$;
- A est un produit de matrices élémentaires ;
- La forme échelonnée réduite de A est I_n ;